8. Λύση απλών διαφορικών εξισώσεων και εξισώσεων κίνησης

8.1 Εξισώσεις κίνησης που οδηγούν σε διαφορικές εξισώσεις χωριζόμενων μεταβλητών

Η διατύπωση των νόμων της Φυσικής στη διαφορική τους μορφή μάς δημιουργεί την ανάγκη να μπορούμε να βρίσκουμε λύσεις εξισώσεων στις οποίες υπεισέρχονται και παράγωγοι των φυσικών μεγεθών. Η λύση των εξισώσεων αυτών, οι οποίες ονομάζονται *διαφορικές εξισώσεις*, αποτελεί έναν από τους κεντρικούς σκοπούς της Μαθηματικής Φυσικής.

Στη Μηχανική, διαφορικές εξισώσεις προκύπτουν κυρίως ως εφαρμογές του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα. Έτσι, αν πάνω σε ένα σώμα μάζας m ασκείται η δύναμη F, η *εξίσωση κίνησης* του σώματος είναι μια διαφορική εξίσωση της μορφής

$$\frac{d(m\upsilon)}{dt} = F, \quad \text{ή} \quad m\frac{d\upsilon}{dt} = F, \quad \text{ή} \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = F. \tag{8.1}$$

Η πολυπλοκότητα της εξίσωσης εξαρτάται κυρίως από τη μορφή που έχει η δύναμη F, η οποία, γενικά, μπορεί να είναι συνάρτηση της θέσης, του χρόνου, ή και της ταχύτητας του σώματος. Ενδέχεται επίσης η μάζα του σώματος να είναι μεταβλητή. Στο στάδιο αυτό, θα εξετάσουμε τη λύση των απλούστερων εξισώσεων αυτού του είδους, οι οποίες λύνονται απευθείας, μέσω ολοκλήρωσης.

Μια διαφορική εξίσωση η οποία μπορεί να αναχθεί στη *διαφορική μορφή*

$$g(y)\,dy = f(x)\,dx, \tag{8.2}$$

ονομάζεται διαφορική εξίσωση *χωριζόμενων μεταβλητών* και μπορεί να λυθεί με απλή ολοκλήρωση των δύο μελών:

$$\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx + c, \tag{8.3}$$

όπου c μια κοινή σταθερά ολοκλήρωσης.

Παρατήρηση: Η φράση '*ολοκλήρωση των δύο μελών*' ίσως χρειάζεται κάποια αιτιολόγηση. Αν δούμε τα δύο μέλη της διαφορικής εξίσωσης $g(y)\,dy = f(x)\,dx$ ως ίσα προς τα διαφορικά των $P(y)$ και $Q(x)$ αντίστοιχα, έχουμε τις εξισώσεις:

$$dP = g(y)\,dy, \qquad dQ = f(x)\,dx, \qquad dP = dQ. \tag{8.4}$$

Με ολοκλήρωση των εξισώσεων αυτών έχουμε

$$P(y) = \int g(y)\,dy, \qquad P(x) = \int f(x)\,dx, \qquad P(y) = Q(x) + c. \tag{8.5}$$

Από αυτές τις εξισώσεις έχουμε την Εξ. (8.3).

Μπορούμε επίσης να ολοκληρώσουμε και τα δύο μέλη της (8.2) μεταξύ συγκεκριμένων (και αντίστοιχων μεταξύ των) ορίων και να έχουμε τη λύση μέσω ορισμένων ολοκληρωμάτων:

$$\int_{y_0}^{y} g(y)\,dy = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx. \tag{8.6}$$

Η απόδειξη της (8.6) είναι απλή: από την τελευταία Εξ. (8.5), για τα ζεύγη των τιμών (x_0, y_0) και (x, y) έχουμε $P(y_0) = Q(x_0) + c$ και $P(y) = Q(x) + c$. Αφαιρώντας βρίσκουμε

$$P(y) - P(y_0) = Q(x) - Q(x_0),$$

η οποία, σε συνδυασμό με τις δύο πρώτες Εξ. (8.5) δίνει την Εξ. (8.6).

Το παράδειγμα που ακολουθεί δείχνει και τις δύο διαδικασίες.

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί η λύση της διαφορικής εξίσωσης $\dfrac{dy}{dx} = y^2 x$, με αρχικές συνθήκες $x = 0,\ y = 1$.

Χωρίζουμε τις μεταβλητές: $\dfrac{dy}{y^2} = x\,dx$.

Θα λύσουμε την εξίσωση και με τις δύο μεθόδους που αναφέρθηκαν: με αόριστα και με ορισμένα ολοκληρώματα.

Με αόριστα ολοκληρώματα	*Με ορισμένα ολοκληρώματα*
Ολοκληρώνουμε τα δύο μέλη της εξίσωσης: $\displaystyle\int \frac{dy}{y^2} = \int x\,dx$ $-\dfrac{1}{y} = \dfrac{x^2}{2} + c$ Αντικαθιστώντας $x = 0,\ y = 1$, βρίσκουμε: $-1 = 0 + c, \quad c = -1$ και $-\dfrac{1}{y} = \dfrac{x^2}{2} - 1$	Ολοκληρώνουμε τα δύο μέλη της εξίσωσης ανάμεσα στις τιμές 1 και y στα αριστερά, και τις αντίστοιχες τιμές 0 και x στα δεξιά: $\displaystyle\int_1^y \frac{dy}{y^2} = \int_0^x x\,dx$ $\left[-\dfrac{1}{y}\right]_1^y = \left[\dfrac{x^2}{2}\right]_0^x$ και $-\dfrac{1}{y} + 1 = \dfrac{x^2}{2}$

Επομένως $y = \dfrac{2}{2 - x^2}$.

Αυτή είναι η λύση του προβλήματος $\dfrac{dy}{dx} = y^2 x$, $(x = 0,\ y = 1)$.

Συνεχίζουμε με απλά παραδείγματα από τη Μηχανική, στα οποία η έκφραση στο αριστερό μέλος της Εξ. (8.2) είναι απλώς το διαφορικό του ζητούμενου μεγέθους. Τα προβλήματα λύνονται είτε με αόριστα είτε με ορισμένα ολοκληρώματα, ή και με τις δύο μεθόδους.

Παράδειγμα 2

Ένα σώμα κινείται πάνω στον άξονα των x, με σταθερή επιτάχυνση a. Να βρεθούν, συναρτήσει του χρόνου, η ταχύτητά του $\upsilon(t)$ και η θέση του $x(t)$, αν αρχικά το σώμα βρισκόταν στο σημείο x_0 και είχε ταχύτητα υ_0.

Το σώμα έχει σταθερή επιτάχυνση $\dfrac{d\upsilon}{dt} = a$.

Η λύση αυτής της εξίσωσης είναι: $\upsilon(t) = \int a\,dt$ ή $\upsilon(t) = at + c$.

Ποια είναι η φυσική σημασία της σταθεράς c; Αν αντικαταστήσουμε $t = 0$ στη συνάρτηση $\upsilon(t)$, βρίσκουμε ότι $\upsilon(0) = c$, ή ότι η σταθερά ολοκλήρωσης c είναι, στην περίπτωση αυτή, η αρχική ταχύτητα του σώματος, έστω υ_0. Έχουμε επομένως τη λύση $\upsilon(t) = \upsilon_0 + at$ στο συγκεκριμένο πρόβλημα. Η συνθήκη $\upsilon = \upsilon_0$ όταν $t = 0$, ονομάζεται *αρχική συνθήκη* του προβλήματος.

Για να βρούμε τη θέση $x(t)$ του σώματος συναρτήσει του χρόνου, γράφουμε τη στιγμιαία ταχύτητα, δηλαδή το ρυθμό μεταβολής του *x* ως προς *t*, ως $\upsilon = \dfrac{dx}{dt}$ και επομένως έχουμε να λύσουμε την εξίσωση

$$\frac{dx}{dt} = \upsilon_0 + at .$$

Η λύση είναι:

$$x(t) = \int (\upsilon_0 + at)\, dt = \upsilon_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2 + c' .$$

Προφανώς $x(0) = c'$ είναι η αρχική θέση του σώματος, έστω x_0, και επομένως, τελικά,

$$x(t) = x_0 + \upsilon_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2$$

είναι η λύση της εξίσωσης κίνησης $\dfrac{d\upsilon}{dt} = a$ με αρχικές συνθήκες $\upsilon(0) = \upsilon_0$ και $x(0) = x_0$.

Ελέγχουμε ότι πράγματι οι $x(t)$ και $\upsilon(t)$ ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες, και ότι με παραγώγιση ως προς t η $x(t)$ δίνει την $\upsilon(t)$ και η παραγώγιση της $\upsilon(t)$ ως προς t μας δίνει την αρχική εξίσωση κίνησης. Αυτός ο έλεγχος είναι καλό να γίνεται στο τέλος.

Παράδειγμα 3

Ένα σώμα μάζας m, κινούμενο πάνω στον άξονα των x, υφίσταται μια δύναμη στην κατεύθυνση του άξονα ίση με $F(t) = at$, όπου a είναι μια σταθερά και t ο χρόνος. Να βρεθεί η ταχύτητα $\upsilon_x(t)$ και η θέση $x(t)$ του σώματος συναρτήσει του χρόνου, αν οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος είναι $x(0) = 0, \quad \upsilon_x(0) = 0$.

Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, η εξίσωση κίνησης του σώματος είναι: $m\dfrac{d\upsilon_x}{dt} = at$.

Αυτή είναι μια εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών, η οποία γράφεται ως $d\upsilon_x = \dfrac{a}{m} t\, dt$, και ολοκληρώνεται για να δώσει: $\displaystyle\int d\upsilon_x = \frac{a}{m}\int t\, dt$, $\quad \upsilon_x = \dfrac{a}{2m} t^2 + c$, $\quad c =$ σταθ.

Από την αρχική συνθήκη $\upsilon_x(0) = 0$, βρίσκουμε ότι $c = 0$ και επομένως $\upsilon_x(t) = \dfrac{a}{2m} t^2$.

Για να βρούμε το $x(t)$, χρησιμοποιούμε τη σχέση $\upsilon_x = \dfrac{dx}{dt}$. Έτσι, $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{a}{2m} t^2$,

η οποία επίσης είναι εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών και δίνει: $\displaystyle\int dx = \frac{a}{2m}\int t^2\, dt$.

Ολοκληρώνοντας, $x = \dfrac{a}{6m} t^3 + c'$.

Επειδή $x(0) = 0$, βρίσκουμε ότι $c' = 0$, και επομένως $x(t) = \dfrac{a}{6m} t^3$.

Στη λύση τέτοιων προβλημάτων, ένα συνηθισμένο λάθος είναι ότι παραλείπεται η σταθερά ολοκλήρωσης, πράγμα που οδηγεί σε λανθασμένα αποτελέσματα.

Ένας εναλλακτικός αλλά ισοδύναμος τρόπος λύσης κάνει χρήση ορισμένων ολοκληρωμάτων. Έτσι, για το ίδιο πρόβλημα, έχουμε την εξίσωση $d\upsilon_x = \dfrac{a}{m} t\, dt$, τα δύο μέλη της οποίας ολοκληρώνουμε, αντίστοιχα, μεταξύ των κάτω ορίων $\upsilon_x = 0$ και $t = 0$, και των γενικών άνω ορίων $\upsilon_x(t)$ και t. Έχουμε, $\displaystyle\int_0^{\upsilon_x} d\upsilon_x = \frac{a}{m}\int_0^t t\, dt$. Το αποτέλεσμα είναι

$$[\upsilon_x]_0^{\upsilon_x} = \frac{a}{m}\left[\tfrac{1}{2}t^2\right]_0^t \qquad \text{ή} \qquad \upsilon_x - 0 = \frac{a}{2m}\left(t^2 - 0\right), \qquad \upsilon_x = \frac{a}{2m}t^2 .$$

Συνεχίζοντας τη διαδικασία για το $x(t)$,

$$\int_0^x dx = \frac{a}{2m}\int_0^t t^2\,dt, \qquad [x]_0^x = \frac{a}{6m}\left[t^3\right]_0^t, \qquad x(t) = \frac{a}{6m}t^3 .$$

Χρησιμοποιώντας ορισμένα ολοκληρώματα, βρίσκουμε τη λύση με πιο σύντομο και συμπαγή τρόπο και αποφεύγουμε το ενδεχόμενο να ξεχάσουμε τη σταθερά ολοκλήρωσης. Θα πρέπει όμως να είμαστε προσεκτικοί στα όρια, δηλαδή το κάτω όριο της μιας μεταβλητής να αντιστοιχεί στο κάτω όριο της άλλης μεταβλητής, και το ίδιο να ισχύει και για τα άνω όρια.

Παράδειγμα 4

Έστω ότι ένα σώμα μάζας m έχει φορτίο q και βρίσκεται μέσα σε ένα μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο έντασης $E(t) = E_0 \sin\omega t$ που έχει κατεύθυνση αυτήν του άξονα των x. Οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος είναι $x(0) = 0,\ \upsilon_x(0) = 0$. Να εξετασθεί η κίνηση του σώματος.

Η εξίσωση κίνησης του σώματος είναι

$$m\frac{d\upsilon_x}{dt} = qE(t) = qE_0\sin\omega t \qquad \text{ή} \qquad \frac{d\upsilon_x}{dt} = a\sin\omega t, \quad \text{όπου} \quad a \equiv \frac{qE_0}{m}.$$

Χωρίζουμε τις μεταβλητές: $d\upsilon_x = a\sin\omega t\, dt$.

Με αόριστα ολοκληρώματα	*Με ορισμένα ολοκληρώματα*
Επομένως είναι: $\upsilon_x(t) = \int a\sin\omega t\,dt = -\frac{a}{\omega}\cos\omega t + c$ Η αρχική συνθήκη $\upsilon_x(0) = 0$ μάς δίνει: $\upsilon_x(0) = 0 = -\frac{a}{\omega} + c$ ή $c = \frac{a}{\omega}$, και έτσι,	Ολοκληρώνουμε μεταξύ των ορίων $t = 0$, $\upsilon_x = 0$, και των γενικών ορίων t και $\upsilon_x(t)$: $\int_0^{\upsilon_x(t)} d\upsilon_x = \int_0^t a\sin\omega t\,dt$, $[\upsilon_x]_0^{\upsilon_x(t)} = a[-\cos\omega t]_0^t$ και

$$\upsilon_x(t) = \frac{a}{\omega}\left(1 - \cos\omega t\right).$$

Συνεχίζοντας, επειδή $\upsilon_x = \frac{dx}{dt}$, έχουμε την εξίσωση $\frac{dx}{dt} = \frac{a}{\omega}\left(1 - \cos\omega t\right)$.

Χωρίζουμε τις μεταβλητές: $dx = \frac{a}{\omega}\left(1 - \cos\omega t\right)dt$.

Αυτή ολοκληρώνεται ως εξής: $x(t) = \int \frac{a}{\omega}\left(1 - \cos\omega t\right)dt =$ $= \frac{a}{\omega}t - \frac{a}{\omega}\frac{1}{\omega}\sin\omega t + c'$ Η αρχική συνθήκη $x(0) = 0$ μας δίνει:	Ολοκληρώνουμε μεταξύ των ορίων $t = 0$, $x = 0$, και των γενικών ορίων t και $x(t)$: $\int_0^{x(t)} dx = \frac{a}{\omega}\int_0^t \left(1 - \cos\omega t\right)dt$, $[x]_0^{x(t)} = \frac{a}{\omega}\left[t - \frac{1}{\omega}\sin\omega t\right]_0^t$

$x(t)=0=\dfrac{a}{\omega}0-\dfrac{a}{\omega^2}0+c'$ ή $c'=0$, και επομένως .	και επομένως

$$x(t)=\frac{a}{\omega^2}\left(\omega t-\sin\omega t\right).$$

Έτσι, η πλήρης λύση του προβλήματος $\dfrac{d\upsilon_x}{dt}=a\sin\omega t$, $x(0)=0$, $\upsilon_x(0)=0$, είναι:

$$x(t)=\frac{a}{\omega^2}\left(\omega t-\sin\omega t\right) \qquad \upsilon_x(t)=\frac{a}{\omega}\left(1-\cos\omega t\right).$$

<u>*Επαλήθευση*</u>

Με αντικατάσταση του $t=0$ μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι οι αρχικές συνθήκες ικανοποιούνται:

$$x(0)=\frac{a}{\omega^2}[(\omega 0)-\sin(\omega 0)]=0 \qquad \upsilon_x(0)=\frac{a}{\omega}[1-\cos(\omega 0)]=0.$$

Επίσης, παραγωγίζοντας το $x(t)$ ως προς t βρίσκουμε την $\upsilon_x(t)$,

$$\frac{d}{dt}x(t)=\frac{a}{\omega^2}\frac{d}{dt}\left(\omega t-\sin\omega t\right)=\frac{a}{\omega^2}\left(\omega-\omega\cos\omega t\right)=\frac{a}{\omega}\left(1-\cos\omega t\right)=\upsilon_x(t)$$

και παραγωγίζοντας την $\upsilon_x(t)$ ως προς t βρίσκουμε την εξίσωση κίνησης:

$$\frac{d}{dt}\upsilon_x(t)=\frac{a}{\omega}\frac{d}{dt}\left(1-\cos\omega t\right)=a\sin\omega t.$$

Ακολουθεί ένα κάπως πιο σύνθετο παράδειγμα από τη Μηχανική.

Παράδειγμα 5

Ένα σώμα μάζας m κινείται πάνω στον άξονα των x. Πάνω στο σώμα ασκείται μόνο μια δύναμη τριβής η οποία είναι ανάλογη της ταχύτητάς του, $F_x=-b\upsilon_x$. Να βρεθούν, συναρτήσει του χρόνου, η ταχύτητα του σώματος $\upsilon_x(t)$ και η θέση του $x(t)$, αν αυτό αρχικά βρισκόταν στο σημείο $x(0)=0$ και είχε ταχύτητα $\upsilon_x(0)=\upsilon_0$.

Η εξίσωση κίνησης του σώματος είναι

$$m\frac{d\upsilon_x}{dt}=-b\upsilon_x.$$

Χωρίζοντας τις μεταβλητές έχουμε

$$\frac{d\upsilon_x}{\upsilon_x}=-\frac{b}{m}dt,$$

ή, γράφοντας ως $\tau\equiv m/b$ τη σταθερά χρόνου που εμφανίζεται στο πρόβλημα, $\dfrac{d\upsilon_x}{\upsilon_x}=-\dfrac{dt}{\tau}$.

Ολοκληρώνοντας στα αριστερά από την αρχική τιμή υ_0 της ταχύτητας μέχρι τη γενική τιμή $\upsilon_x(t)$, και στα δεξιά από την αρχική τιμή $t=0$ του χρόνου μέχρι τη γενική τιμή t, έχουμε:

$$\int_{\upsilon_0}^{\upsilon_x}\frac{d\upsilon_x}{\upsilon_x}=-\frac{1}{\tau}\int_0^t dt$$

Επομένως,

$$\left[\ln\upsilon_x\right]_{\upsilon_0}^{\upsilon_x} = -\frac{1}{\tau}\left[t\right]_0^t, \qquad \ln\upsilon_x(t) - \ln\upsilon_0 = -\frac{t}{\tau}, \qquad \ln\frac{\upsilon_x(t)}{\upsilon_0} = -\frac{t}{\tau}, \qquad \frac{\upsilon_x(t)}{\upsilon_0} = e^{-t/\tau},$$

και τελικά $\upsilon_x(t) = \upsilon_0\, e^{-t/\tau}$.

Επειδή είναι $\upsilon_x(t) = \dfrac{dx}{dt}$, έχουμε $\dfrac{dx}{dt} = \upsilon_0\, e^{-t/\tau}$, ή $dx = \upsilon_0\, e^{-t/\tau} dt$.

Ολοκληρώνοντας ανάμεσα στα κατάλληλα όρια, $\displaystyle\int_0^{x(t)} dx = \upsilon_0 \int_0^t e^{-t/\tau} dt$,

ή

$$\left[x\right]_0^{x(t)} = -\upsilon_0\tau\left[e^{-t/\tau}\right]_0^t, \qquad x(t) = -\upsilon_0\tau\left(e^{-t/\tau} - 1\right) \qquad \text{και τελικά} \qquad x(t) = \upsilon_0\tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right).$$

8.2 Η χρήση της παραγώγου ως νέας μεταβλητής

Μερικές φορές είναι δύσκολο ή και αδύνατο να ολοκληρώσουμε μια εξίσωση της μορφής $\dfrac{d^2y}{dx^2} = F(y)$ για να βρούμε την $y(x)$. Χρησιμοποιούμε τότε την παράγωγο $u = \dfrac{dy}{dx}$ ως νέα μεταβλητή, και τη σχέση

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dy}u = \frac{1}{2}\frac{d(u^2)}{dy} \qquad (8.7)$$

για να απαλείψουμε τη μεταβλητή x. Αποκτούμε έτσι την εξίσωση

$$\frac{d(u^2)}{dy} = 2F(y), \qquad d(u^2) = 2F(y)\,dy \qquad (8.8)$$

η οποία είναι εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών, και την οποία ίσως μπορούμε να ολοκληρώσουμε για τη λύση $u(y)$. Ένα παράδειγμα θα επιδείξει τη μέθοδο:

Παράδειγμα 6

Ένα σώμα μάζας m, αρχικά ακίνητο, πέφτει ακτινικά προς μια ακίνητη σημειακή μάζα M κάτω από την επίδραση της μεταξύ τους βαρυτικής έλξης. Η αρχική απόσταση των δύο μαζών ήταν a. Να μελετηθεί η κίνηση του σώματος.

Η ελκτική δύναμη που ασκεί η μάζα M πάνω στη μάζα m όταν η μεταξύ τους απόσταση είναι r, είναι, σύμφωνα με τον νόμο της βαρύτητας του Νεύτωνα,

$$F(r) = -G\frac{mM}{r^2} \quad \text{(αρνητική γιατί έχει κατεύθυνση προς αυτήν της μείωσης του } r\text{).}$$

Η ακτινική επιτάχυνση της m δίνεται από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για την κίνηση:

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = F(r), \qquad m\frac{d^2r}{dt^2} = -G\frac{mM}{r^2}.$$

Η εξίσωση αυτή δεν μπορεί να λυθεί για το r συναρτήσει του χρόνου t. Μπορούμε όμως, ως πρώτο βήμα, να βρούμε την $\upsilon(r)$. Απαλείφουμε τον χρόνο, χρησιμοποιώντας την παράγωγο $\upsilon = \dfrac{dr}{dt}$ (ταχύτητα εδώ) ως μεταβλητή, και τη σχέση $\dfrac{d^2r}{dt^2} = \dfrac{d\upsilon}{dt} = \dfrac{d\upsilon}{dr}\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{d\upsilon}{dr}\upsilon$.

Έτσι,

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \upsilon\frac{d\upsilon}{dr} = -\frac{GM}{r^2}.$$

Αυτή τώρα είναι μια εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών, από την οποία βρίσκουμε ότι

$$\upsilon\, d\upsilon = -GM\,\frac{dr}{r^2}, \qquad \int_0^{\upsilon(r)} \upsilon\, d\upsilon = -GM \int_a^r \frac{dr}{r^2}, \qquad \left[\tfrac{1}{2}\upsilon^2\right]_0^{\upsilon(r)} = -GM\left[-\frac{1}{r}\right]_a^r,$$

$$\frac{1}{2}\upsilon^2 = GM\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}\right), \qquad \text{και} \qquad \upsilon(r) = -\sqrt{2GM\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}\right)},$$

όπου πήραμε το αρνητικό πρόσημο για πτώση προς το κέντρο. Η σχέση αυτή εκφράζει τη διατήρηση της ενέργειας.

Επειδή $\upsilon = \dfrac{dr}{dt}$, έχουμε

$$\frac{dr}{dt} = -\sqrt{2GM\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}\right)}.$$

Χωρίζοντας τις μεταβλητές,

$$\sqrt{\frac{2GM}{a}}\,dt = -\frac{dr}{\sqrt{\frac{a}{r}-1}} \qquad \text{και} \qquad \upsilon_\delta\, dt = -\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{a-r}}\,dr \qquad \text{όπου} \qquad \upsilon_\delta \equiv \sqrt{\frac{2GM}{a}}.$$

Ολοκληρώνοντας:

$$\upsilon_\delta \int_0^t dt = -\int_a^r \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{a-r}}\,dr,$$

ή

$$[t]_0^t = -\frac{1}{\upsilon_\delta}\left[-\sqrt{r(a-r)} + a\sin^{-1}\sqrt{\frac{r}{a}}\right]_a^r$$

και

$$t(r) = \frac{a}{\upsilon_\delta}\left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\sqrt{\frac{r}{a}} + \sqrt{\frac{r}{a}\left(1-\frac{r}{a}\right)}\right).$$

Η εξίσωση αυτή δεν μπορεί να λυθεί για την $r(t)$. Αντί αυτού, έχουμε τη συνάρτηση $t(r)$.

Προβλήματα

1 Ένα σώμα έχει μάζα m, βρίσκεται αρχικά ακίνητο στη θέση $y=0$ και αρχίζει να πέφτει κατακόρυφα (κατά μήκος του άξονα των y, η θετική κατεύθυνση του οποίου είναι προς τα πάνω). Η δύναμη της τριβής του αέρα είναι ίση με $-b\upsilon$, όπου υ η ταχύτητα του σώματος και b μια θετική σταθερά.

(α) Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος ως συνάρτηση του χρόνου. (β) Δείξτε ότι το σώμα τείνει να αποκτήσει μια ορική ταχύτητα και βρείτε την τιμή της. (γ) Να βρεθεί η θέση του σώματος, y, ως συνάρτηση του χρόνου. (δ) Αναπτύξτε τις απαντήσεις για τα $y(t)$ και $\upsilon(t)$ σε σειρές δυνάμεων του χρόνου, για να βρείτε σχέσεις που ισχύουν για μικρές τιμές του t.

2 Σώμα μάζας m εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα V $(V>0)$ κατά μήκος του άξονα των y, η θετική κατεύθυνση του οποίου είναι προς τα πάνω. Η αρχική θέση του σώματος είναι $y=0$. Πάνω στο σώμα δρα, εκτός του βάρους του, δύναμη τριβής από τον αέρα ίση με $-mk\upsilon$, όπου υ η ταχύτητα του σώματος και k μια θετική σταθερά.

(α) Να διατυπωθεί η εξίσωση κίνησης της μάζας. (β) Χρησιμοποιήστε τη σχέση $\dfrac{d\upsilon}{dt} = \dfrac{d\upsilon}{dy}\dfrac{dy}{dt} = \upsilon\dfrac{d\upsilon}{dy}$ για να δείξετε ότι η υ και το y ικανοποιούν τη σχέση

$y = \dfrac{V-\upsilon}{k} - \dfrac{g}{k^2}\left[\ln\left(1+\dfrac{kV}{g}\right) - \ln\left(1+\dfrac{k\upsilon}{g}\right)\right]$. (γ) Να βρείτε το μέγιστο ύψος H στο οποίο θα φθάσει το σώμα. (δ) Αν $\upsilon = -U$ είναι η ταχύτητα με την οποία το σώμα επιστρέφει στο σημείο $y = 0$, δείξτε ότι: $g - kU = (g + kV)\exp\left(-\dfrac{k}{g}(V+U)\right)$.

3 Σωματίδιο μάζας m κινείται στο επίπεδο xy. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στο σημείο (0, 0) και έχει ταχύτητα υ_0 η οποία σχηματίζει γωνία 45^o με τον άξονα x. Το επίπεδο xy είναι οριζόντια λεία επιφάνεια. Η μόνη δύναμη που δρα στο σωματίδιο είναι μία δύναμη τριβής, $-mk\upsilon_y$, στην κατεύθυνση y μόνο, η οποία είναι ανάλογη της συνιστώσας υ_y της ταχύτητάς του, όπου k είναι ένας σταθερός θετικός συντελεστής.

(α) Ποια είναι η εξίσωση κίνησης του σωματιδίου; (β) Να βρεθεί η ταχύτητά του ως συνάρτηση του χρόνου. Μετά πόσο χρόνο η κατακόρυφη συνιστώσα της γίνεται $\upsilon_0 / 2$;
(γ) Ποια είναι η εξίσωση της τροχιάς που διαγράφει το σωματίδιο στο επίπεδο xy; (δ) Ποια είναι η μέγιστη τιμή y_m του y στην τροχιά;

Βιβλιογραφία

C. Kittel, W. D. Knight, M. A. Ruderman, A. C. Helmholz και B. J. Moyer, *Μηχανική*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα, 1998. Κεφ. 3.

M. R. Spiegel, *Θεωρητική Μηχανική*. Εκδόσεις ΕΣΠΙ, Αθήνα, 1985. Κεφ. 1, 2, 3.

I. S. Sokolnikoff και R. M. Redheffer, *Μαθηματικά για Φυσικούς και Μηχανικούς*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2001. Κεφ. 2, 3.

W. E. Boyce και R. C. DiPrima, *Στοιχειώδεις Διαφορικές Εξισώσεις και Προβλήματα Συνοριακών Τιμών*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα, 1999. Κεφ. 2.